

**В. Б. Губин**

**МАТЕМАТИКИ,  
БОЙТЕСЬ ФИЗИКИ!  
ФИЗИКИ,  
ОПАСАЙТЕСЬ  
МАТЕМАТИКОВ!**

**Москва  
Российский университет дружбы народов  
2010**

ББК 22.317

Г 93

**Губин В.Б.**

Г 93 Математики, бойтесь физики! Физики, опасайтесь математиков! – М.: РУДН, 2010. – 46. с.

ISBN

В статье критически анализируется подход к согласованию термодинамической необратимости с обратимостью механики, основанный на понятии «тонкой» энтропии. Показывается обоснованность интерпретации необратимости, разработанной Смолуховским.

Сайт со статьями автора и книгами **«Физические модели и реальность. Проблема согласования термодинамики и механики», «О физике, математике и методологии», «О методологии лженауки», «О науке и о лженауке: <http://gubin.narod.ru>**

Просьба присылать отзывы и замечания на адреса электронной почты: [VBGubin@yandex.ru](mailto:VBGubin@yandex.ru), [VBGubin@mail.ru](mailto:VBGubin@mail.ru).

ISBN

ББК 22.317

© Губин В.Б., 2010

© Российский университет дружбы народов, Издательство, 2010

## **МАТЕМАТИКИ, БОЙТЕСЬ ФИЗИКИ! ФИЗИКИ, ОПАСАЙТЕСЬ МАТЕМАТИКОВ!**

В 1998 году в «Вопросах философии» была опубликована статья «О связи стилей математического и физического мышления с природой задач математики и физики»<sup>[1]</sup>. В ней было отмечено, что типичные задачи математики - прямые, когда даны исходные положения и надо узнать следствия, причем всегда критерий правильности решения - формальная правильность вывода. Типичная же задача физики как науки о выяснении причин явлений и построении моделей реальности - обратная: по явлению узнать его фундаментальные составляющие и механизм их действия.

Отбор вероятных решений обратных задач производится и проверяется не формальной правильностью получения вывода, а сравнением его с реальностью. Положение осложняется неисчерпаемостью изучаемого мира, что не позволяет, во-первых, получить точного ответа (построить точную модель мира или части его), так что приходится и сравнивать как-то приближенно. Во-вторых, проблемой оказывается и выбор из бесконечного количества именно тех факторов, которые надо учесть при построении упрощенной, идеализированной модели. В конечном счете критерием правильности теорий и систем теорий оказывается общественно историческая практика. Практическим же критерием является согласованность решения со всем накопленным прежде знанием, выраженным в научных теориях<sup>[2]</sup>. Конечно, широта области согласования должна соответствовать области задачи. Иногда необходимость получения согласования заставляет пересматривать и корректировать прежние знания. Важнейшим принципом отбора естественных, адекватных решений является принцип бритвы Оккама.

Ничего специфически физического в методике математики нет. Поэтому экскурсии математиков в непривычную для них физику во многих принципиальных случаях весьма рискованны. Они могут указывать на ошибки математического плана или писать решения точно поставленных типичных задач, но оценивать решения и тем более решать физические проблемы - обычно не их удел, хотя великие исключения бывали (например, Ньютон, Пуанкаре, Келдыш).

Об этом говорил Фейнман<sup>[3]</sup>: «Математики имеют дело только со структурой рассуждений, и им в сущности безразлично, о чем они говорят. ... Другими словами, математик готовит абстрактные доказательства, которыми вы можете воспользоваться, приписав реальному миру некоторый набор аксиом. Физик же не должен забывать о значении своих фраз. Это очень важная обязанность, которой склонны пренебрегать люди, пришедшие в физику из математики. Физика - не математика, а математика - не физика. ... в физике вы должны понимать связь слов с реальным миром.» Всё это не касается прикладной математики - специалистов по математическому моделированию, поскольку они целенаправленно занимаются именно обратными задачами и вынуждены смотреть не только на формальную безошибочность аппарата, но и на адекватность реальности, степень которой они сами должны определять извне математики.

Однако повсеместно существует досадное недопонимание принципиальной разницы природы математики и физики и, соответственно, критериев правильности (истинности) решения. Так, автор обзора «Научность: эталоны, идеалы, критерии»<sup>[4]</sup> - философ-методолог науки - за образец доказательства истинности, правильности в познании реальности взял именно математический критерий: строгую формальную доказанность. Чего не может быть, потому что не может быть никогда. Раздолье скептикам - ведь действительно нельзя ничего строго доказать. Однако они как-то забывают об этом в реальной жизни и без особого опасения с успехом

пользуются ложками и вилками, не боясь их проглотить или уколоться. Еще один методолог, но уже физик, вполне серьезно привел довод при выборе пути в обосновании термодинамики<sup>[5]</sup>: «...многие математики, например, Б.Мандельброт, высказывались в том смысле, что ... полное обоснование термодинамики из динамики ... никому не нужно». Это странно. Какой вес могут иметь мнения математиков в вопросе об отражении природы в теориях? Разве они работают с природой и имеют свое математическое мнение о проблеме единства мира, требующего согласованности теорий? Математике это совершенно безразлично.

Наиболее странна и удивительна на первый взгляд ситуация с более чем столетними усилиями получить необратимость для газа механических частиц. У нас сейчас интенсивно занимается прояснением этой проблемы академик В.В.Козлов<sup>[6,7,8]</sup>.

Постановка вопроса весьма проста. Существует формулировка Клаузиуса второго закона термодинамики: замкнутая изолированная система стремится к равновесию. Скажем, пусть сосуд разделен перегородкой, и в одной части находится газ из молекул воздуха, вторая - пуста. При удалении перегородки газ разлетается по всему объему. Приведенная формулировка буквально утверждает, что получившееся равномерное (равновесное) распределение газа по объему в последующем не будет изменяться, например в исходную часть сосуда он больше не соберется. С другой стороны, теорема Пуанкаре о возвращениях математически доказывает, что такой газ обязательно будет с некоторой точностью периодически возвращаться к исходному состоянию. Соответственно точности восстановления оценивается и период этой квазипериодичности. При этом период резко возрастает при росте числа частиц газа, быстро становясь бóльшим времени существования Земли. Сто лет назад австрийский физхимик Мариан фон Смолуховский проверил

эту тенденцию экспериментально на взвеси капелек туши в воде. И сделал естественный вывод, что утверждение термодинамики об окончательной необратимости установления равновесия есть впечатление наблюдателя, которому практически невозможно дожидаться возвращений неравновесных состояний: «...кажущиеся необратимыми процессы в действительности являются обратимыми»<sup>[9]</sup>. «Представляется ли нам какой-либо ... процесс обратимым или необратимым..., зависит ... только от начального состояния и от продолжительности наблюдения»<sup>[10]</sup>. Для малых систем или для очень малых отклонений от равновесия возвращения реально наблюдаются, но дальше - нет. Так что и волки сыты, и овцы целы. Всё совершенно очевидно и естественно и не требует титанических усилий для понимания.

В те далекие годы такое решение было с энтузиазмом принято. В 1918 году «Успехи физических наук» поместили некролог, написанный Виктором Анри<sup>[11]</sup>:

«Пятого сентября 1917 года во время эпидемии дизентерии в Кракове умер 45-ти лет знаменитый физик Смолуховский.

... термодинамика, которая имела такой огромный успех при изучении физической и физикохимической статики, натолкнулась на непреодолимые затруднения при изучении кинетики явлений природы. Кроме того, целый ряд данных относительно диффузии газов, внутреннего трения и теплопроводности газов, вызывали уже в конце XIX столетия постановку общих вопросов и давали массу новых фактов, которые никакими способами не могли быть объяснены одними принципами термодинамики. Для этих явлений молекулярная физика давала простые количественные объяснения. Первая работа Смолуховского в 1898 году и относится к этим вопросам.

... Итак, мы видим, что если рассматривать мир с точки зрения микрокосмоса, то энтропия может одинаково увеличиваться, или уменьшаться, теплота может одинаково

переходить от теплого тела к холодному и обратно, молекулы могут одинаково двигаться от более концентрированных частей к менее концентрированным и обратно, - вообще все явления природы представляются нам обратимыми, нужно только иметь терпение выждать достаточно долгое время и наблюдать возможно малые объемы. (Разумеется, речь не идет о ничем не ограниченных системах, в которых разлет и растекание будут всё время увеличиваться, если только какое-то взаимное притяжение не воспрепятствует этому (<sup>[12]</sup>, стр. 35. - В.Г.)) Смолуховский вычисляет, сколько времени надо было бы ждать, чтобы в объеме, равном одному кубическому сантиметру, ... в одной половине накопилось бы на 1% больше кислорода, чем в другой, ... и находит, что это время равно 10 в степени 10 в 14-й секундам. Если же взять объем, подобный тем, который наблюдают в ультрамикроскоп, т.е.  $(0,2\mu)^3$ , то подобное отклонение в размещении молекул кислорода наблюдалось бы один раз в каждые  $10^{-9}$  секунд.

... Второй принцип термодинамики (необратимость в строгой, безусловной формулировке. - В.Г.) представляется, таким образом, *только удобным фактическим правилом* (курсив мой. - В.Г.), пригодным только для нашего макрокосма и не соответствующего явлениям природы при их тонком анализе.

... Мы видим, какое важное значение имели работы так преждевременно погибшего физика Смолуховского, который способствовал вместе с его сверстниками преобразованию всего нашего философского мирозерцания.»

Да и сейчас большинство физиков и химиков понимают второй закон не буквально, не абсолютно, а как осознаваемое приближение. Во всяком случае все знают о вероятностях и флуктуациях. Но впоследствии, в первую очередь из-за обычных представлений физиков о чистой объективности открываемых физических законов, отношение к интерпретации Смолуховского, имеющей явный субъектив-

ный вклад, постепенно изменилось до полного от нее отказа в ведущих теоретических кругах. У нас это проявилось в «Статистической физике» Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица <sup>[13]</sup>, где интерпретация Смолуховского отвергается без упоминания его имени, и в статье «Смолуховский» автора Д.Н.Зубарева в третьем издании БСЭ, где не случайно о его интерпретации нет ни слова (в отличие от второго), что, вообще говоря, неспортивно.

Надо сказать, интенсивная математизация физики также сыграла свою роль, поскольку выражаться языком функций от неких аргументов проще, приятней и красивше. А что функциональная зависимость соответствует редукционистской связи функции и аргумента, т.е. сводимости высшего уровня к низшему, что недопустимо по общей методологии, - этого не замечали или не признавали за существенное.<sup>1)</sup> Таким образом, *впечатление* отрезалось.

---

<sup>1)</sup> Так, И.ф.Нейман писал о связи макронаблюдаемых и микропеременных (Нейман И. Математические основы квантовой механики. - М.: Наука, 1964, стр. 156): «...знание  $2k$  параметров (при  $k$  степенях свободы. - В.Г.) позволило бы описать... поведение причинно, но теория газов использует лишь два: давление и температуру, которые являются определенными, сложными функциями этих  $2k$  параметров.» Но нет, они не являются функциями этих  $2k$  параметров в том смысле, что не порождаются ими как, например, электрическое поле зарядом, а определяются в специфическом процессе.

Он же сказал в связи с проблемой субквантовых параметров, что ансамблей без дисперсии не бывает. Это означает, что вероятностный квантовомеханический ансамбль не может быть образован из детерминистских субквантовых «первоначал», скажем - частиц. Аналогично доказательствам невозможности термодинамики и статистики при классических частицах, например - Н.С.Крылова (Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. - М.: Изд. АН СССР. 1950).

В 1972 году А.И.Ахиезер и Р.В.Половин в «Успехах физических наук» (Ахиезер А.И., Половин Р.В. Почему невозможно ввести в квантовую механику скрытые параметры // Успехи физических наук, 1972. Т. 107. Вып. 2. С. 463-479) дали обзор доказательств невозможности



В результате или оставались гибридные, непоследовательные объяснения необратимости, как, например, в курсе физики Сивухина <sup>[14]</sup>, или не оставалось никакого объяснения, как в «Статистической физике» Ландау и Лифшица, или продолжались явно ошибочные и бесплодные попытки выработать более адекватную, всегда преимущественно объективистскую интерпретацию. Иногда, как это сделал И.Р.Пригожин, источник закладывался в природу - таков его новый природный «принцип отбора» начальных состояний <sup>[15]</sup>. Но чаще опирались на так или иначе комбинируемые математические построения, как, например, Кац <sup>[16]</sup>, позже Ж.Брикмон <sup>[17]</sup> и в последние годы В.В.Козлов. Как считается, он получил обнадеживающие результаты. Посмотрим на характер его подхода и доказательств.

В книге «Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре» <sup>[6]</sup> эпиграфом к **Введению** автор поставил слова Пуанкаре: «В кинетической теории газов имеется еще очень много вопросов, вызывающих затруднения у тех, кто привык к математической строгости». Такое «математическое» отношение человека, который занимается прояснением связи физических моделей, к пониманию задачи, сразу же настораживает. Потому что в вопросах о реальности есть много аспектов нематематического происхождения. Первый из них – допустимость неточности принимаемой модели по отношению к реальности и неточности совпадения получаемых микрорасчетов с окончательно принимаемой моделью явления.

Так, хотя все знают, что квантовая механика переходит в классическую при стремлении квантовой неопределенности

---

скрытых параметров. И все доводы, которые они привели против скрытых параметров, в существенной части обязательно базируются на предположении, что скрытые параметры сами каким-то образом порождают квантовые наблюдаемые. Они даже записали эту связь в виде формулы: квантовые наблюдаемые есть функции скрытых параметров, что надо было бы еще доказать, что в общем случае невозможно.

к нулю, до сих пор нет четкого формального разъяснения этого перехода: как ни уменьшай квантовую неопределенность, дискретный спектр частицы в яме так и остается дискретным. Или как ни уменьшай скорость по сравнению со скоростью света, механика всё равно остается релятивистской. И лишь допустимость неточности наблюдения или результата действий приводит к неотличимости в околопредельной области дискретного спектра от непрерывного, а релятивистской механики от классической. А допустимость идет вовсе не от математики и даже не от самой физической реальности, а от свойств субъекта и его деятельности. Эта особенность напрямую проявляет себя в вопросе необратимости. Для математики нет «долго», поэтому она видит квазипериодичность движения в замкнутом объеме при любом конечном числе частиц, но для субъекта она может оказаться практически ненаблюдаемой. Аналогично при вероятностном рассмотрении есть ненулевая вероятность даже скорого возвращения заметно неравновесного состояния, но для субъекта при больших числах частиц она пренебрежимо мала. Это может быть понятно и математике, если ей предъявить на ее языке эти ограничения. Но при этом результирующий закон не будет чисто объективным. И настоящей задачей не будет добиваться его хотя бы большей объективизации. Настоящей задачей является открытие реального механизма формирования закона - как со стороны материала, так и учета вклада субъективного. Не в смысле психологии, а в связи с характерными чертами конкретной деятельности субъекта. В случае второго закона в формулировке Клаузиуса верный механизм изложил Смолуховский: тут учтены и разбегание частиц по всему объему за время релаксации, и квазиобратимость, период которой зависит от количества частиц и величины отклонения от равновесия, и доступное время наблюдения, и соответствующее пренебрежение слишком малыми вероятностями относительно больших флуктуаций. Здесь практически нет больше вопросов, и прежде чем

заниматься парадоксами согласования термодинамики и механики, это надо хорошо понять.

В.В.Козлов начинает с предварительного изложения правильного понимания классической термодинамики: «Равновесная термодинамика - это по сути дела геометрия дифференциальных форм постоянного класса 2» (<sup>[6]</sup>, стр.14). И выводит, с точностью до несущественной константы, выражение для энтропии  $S$ :

$$S = \mu c \ln \tau + \mu R \ln V. \quad (1.7)$$

(здесь привычное для термодинамики  $\mu$  (вместо  $m$  у Козлова, которое у него позже становится массами частиц и другими величинами) - количество молей газа;  $c$  - молярная теплоемкость при постоянном объеме;  $\tau$  - температура,  $R$  - универсальная газовая постоянная;  $\mu R = Nk$ , где  $N$  - число частиц,  $k$  - постоянная Больцмана;  $V$  (вместо  $v$  у Козлова, которое позже у него становится скоростями частиц, а еще позже - векторным полем) - вмещающий объем.)

Однако такая энтропия не аддитивна, как должно быть по классической термодинамике. Она, так сказать, страдает парадоксом Гиббса (первого рода). При сложении двух одинаковых систем убираением между ними перегородки энтропия (1.7) получившейся системы оказывается не равной сумме энтропий исходных систем из-за удвоения объема  $V$  под знаком логарифма. В то время как наблюдаемые суммарный объем и давление, а также результаты квазистатических процессов в целом одинаковы.

В «Статистической термодинамике» <sup>[18]</sup> Шредингера, переизданной тремя годами раньше выхода «Теплового равновесия по Гиббсу и Пуанкаре» Козлова, Шредингер с применением квантов получает выражение для энтропии (стр. 62)

$$S = nk \log\left(\frac{V}{n}\right) + \frac{3}{2}nk \log T + nk \log\left(\frac{2\pi mk}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}nk. \quad (8.12)$$

«Прежде всего обращаем внимание на то, что это выражение зависит разумным образом от  $V$  и  $n$ ; при умножении  $n$  и  $V$  на некоторый множитель  $S$  возрастает во столько же раз. Это может показаться тривиальным, однако ... именно в этом пункте классическая точка зрения ... терпит фиаско».

В следующем пункте - «Крах классической теории. Парадокс Гиббса» (стр. 64) - Шредингер это показывает:

«Приведем вкратце соответствующие классические рассуждения, которые при поверхностном рассмотрении приводят, казалось бы, почти к тем же самым результатам.» И получает выражение для энтропии (стр. 65):

$$S_{\text{газ}} = nk \log V + \frac{3nk}{2} \log T + nk \log\left(\frac{2\pi mk}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}nk. \quad (8.16)$$

«Подлинным недостатком выражения (8.16), делающим его совершенно непригодным, несмотря на большое сходство с (8.12), является то, что оно дает неправильную зависимость от  $n$  и  $V$ . Постоянная не удваивается, когда  $n$  и  $V$  увеличиваются вдвое. ... Пытаясь применить это выражение, как ранее, для получения формулы, определяющей давление пара, мы пришли бы к ошеломляющему результату: мы не только не получили бы правильного значения для давления пара - мы его не получили бы вовсе!»

Этот парадокс решали, начиная с самого Гиббса, уменьшением состояний того самого ансамбля Гиббса (фазового объема), который в первые времена старались зачертить фазовой траекторией механической системы частиц. Основанием уменьшения было предположение о ненужности учета положений разных частиц в одних и тех же местах (состояниях):  $N!$  перестановок стали считать за одно микросостояние, так что вместо числа всех состояний,

пропорционального  $V^N$ , оставляли в  $N!$  меньшее. Затем для больших чисел частиц с помощью формулы Стирлинга  $N!$  приблизительно превращали в  $N^N$  и получали  $V^N/N^N = (V/N)^N$ , так что второе слагаемое в (1.7) превращалось в необходимое  $\mu R \ln(V/N) = Nk \ln(V/N)$ . Ясное изложение противоречия и устраняющей его традиционной процедуры дано в 14-м параграфе «Статистической физики» Я.П.Терлецкого <sup>[19]</sup>.

Это решение порождает много трудных вопросов. То ли оно проходит в классике (Гиббс, Семенченко, Терлецкий), то ли оно обосновывается только квантовомеханической неразличимостью тождественных частиц (Шредингер и в общем почти все современные авторы). Кроме того, оно приводит к парадоксу Гиббса второго рода, якобы разрешаемому квантовым запретом плавного перехода одних частиц в другие (Зоммерфельд, пункты 1 и 2 параграфа 13 в <sup>[20]</sup>; Кубо, стр. 209 в <sup>[21]</sup> с примечанием: «...макроскопические законы, каковыми являются законы термодинамики, отражают дискретную природу микроскопического мира, так как в противном случае вся термодинамика не могла бы быть справедливой»). Более того, на модели можно показать, что классическая термодинамика (без квантов) возникает при конечном числе частиц, и при этом аддитивность систем и, соответственно, энтропии в квазистатике может быть сделана сколь угодно точной (на языке «эпсилон и дельта»), когда прием с формулой Стирлинга не проходит. (Более подробно о парадоксах Гиббса и отношении к ним разных авторов см. в 4-м параграфе 1-й главы книги <sup>[22]</sup> и в статье <sup>[23]</sup>.)

На самом деле одинаковость частиц здесь вообще не при чем. Аддитивность возникает при зависимости давления только от полной энергии всех частиц, причем независимо от их тождественности, а также от распределения энергии по частицам: это динамическое свойство, существующее при однородной зависимости энергии от импульса и только в квазистатике (в адиабатическом пределе) <sup>[22,24]</sup>. Привычное представление об эффективной доступности всего объема для

всех частиц (что и реализуется при вычислении статистической суммы (интеграла)) нереалистично отражает процесс измерения (возникновения) макропараметров. В квазистатике (равновесии) на каждую частицу фактически приходится именно  $N$ -я часть всего объема. Построить-то ансамбль Гиббса и фазовый объем как допустимую область можно, но применять его к макродинамике надо конкретно, а не схоластически универсально. Первичной является реальная динамика, которая проявляет аддитивность, а не более абстрактные построения ансамблей. Во всяком случае вполне работоспособная классическая модель аддитивной термодинамики с конечным числом частиц отвергает как приближенное решение с перестановками частиц, так и необходимость учитывать квантовые эффекты <sup>[22-24]</sup>. Таким образом, «объемная» часть энтропии правильно записывается как  $Nk \ln(V/N)$ .

Далее **во Введении, п. 3. Парадокс возвращаемости** написано определение:

«Согласно классической кинетической теории, *идеальный газ* представляет собой систему  $N$  одинаковых частиц, помещенных в сосуд с объемом  $V$ . Газ считается разреженным в том смысле, что его отдельные частицы вообще не взаимодействуют друг с другом.

В физической литературе идеальный газ обычно отождествляют (причем безосновательно) с *газом Больцмана-Гиббса*, состоящим из  $N$  одинаковых шариков, которые упруго сталкиваются друг с другом. Однако уравнение состояния такого газа, полученное известными методами статистической механики, будет отличаться от классического уравнения Клапейрона. Таким образом, газ Больцмана-Гиббса является простейшей моделью *реального* (а не идеального) газа.»

А вот в реальности не надо ничего доводить до абсурда. В определенном смысле газ Больцмана-Гиббса с короткодействующими потенциалами принимается как

идеальный, а именно в приближенной модели - в случае пренебрежения относительно малым суммарным объемом частиц по сравнению со вмещающим объемом. Тут главное то, что такой газ реалистическим образом дает основание и возможность выравнивания энергий движения по объему и по разным направлениям и в то же время при малых частицах приближенно не порождает поверхностных эффектов и, соответственно, допускает аддитивное сложение систем. Фактически по отношению к габаритам объема газ принимается состоящим из точечных частиц, но теоретически обеспечивается источник перераспределения энергии по направлениям. Газ же из действительно точечных частиц не позволяет получить температуру-скаляр. Просто надо всегда помнить, что термодинамика - приближенная теория. Не только по отношению к реальности, но даже по отношению к микроскопическому прослеживанию модельного движения частиц. Если строго, то вообще-то даже не существует никаких замечательных систем квадратичных форм. Это лишь идеализированное приближение. Так иностранец иногда удивляется, почему слово «сол» пишется с мягким знаком.

Следует еще добавить, что классическая термодинамика получается и с неодинаковыми частицами по причине зависимости давления только от энергии.

Вообще все эти бильярды с частицами, свободно движущимися от одной ограничивающей стенки до другой, не имеют никакого значения для обычной классической термодинамики. Когда свободный пробег частиц намного меньше характерных размеров объема, то благоприятные условия и результаты усреднения (скажем, плотности, энергии и давления внутри и на стенках) получаются автоматически. Частица, отразившаяся от границы, из-за столкновений с массой других частиц почти тут же о том «забывает» и «усредняется». При этом распределение вероятностей обнаружить частицу в каком-то месте объема зависит только

от свойств внутреннего пространства, но не от формы стенок, почему объем и выступает как скаляр, в то время как В.В.Козлов постоянно упоминает о необходимости учитывать эту форму. Во второй половине 60-х я несколько лет как раз пытался как-то записать энтропию как функцию координат частиц приемлемо в плане отражения неоднородностей положения частиц, но как скаляр, независимо от формы объема. Ничего не получилось (см. первый параграф первой главы <sup>[22]</sup>). Пришлось сменить направление поиска. Решение оказалось непривычным (вторая глава в <sup>[22]</sup>), но в духе Смолуховского и, между прочим, в направлении мыслей Пуанкаре о грубости управления частицами (см. ниже).

Затем В.В.Козлов математически показывает зачерчивание прямоугольника с зеркально отражающими границами траекторией материальной точки с удовлетворительным результатом в плане качества зачерчивания. К сожалению, для набора частиц движение оказывается квазипериодическим (для одной, конечно, тоже). И он начинает перебирать варианты поправить положение. Сначала он обращается к статье Пуанкаре 1893 года, откуда цитирует: «Англичане предложили гипотезу.... Чтобы разъяснить ее смысл, я прибегну к услугам сравнения: если имеется 100 кг пшеницы и одно зерно ячменя, то спрятать это зерно в пшенице очень легко, но отыскать его снова почти невозможно, так что это явление кажется в некотором смысле необратимым. Это происходит потому, что зерна малы и их много; подобным образом кажущаяся необратимость природных процессов обусловлена тем обстоятельством, что молекулы слишком малы и их слишком много, чтобы наши грубые органы чувств могли иметь дело с ними...

Развитие этой идеи послужило началом возникновения кинетической теории газов, которая вплоть до настоящего времени представляет собой наиболее серьезную попытку примирения механицизма и опыта.



Однако все эти трудности остались непреодоленными. Теорема, которую легко доказать, говорит нам, что ограниченный мир, подчиняющийся только законам механики, всегда будет проходить через состояние, очень близкое к его начальному состоянию...

... для того, чтобы наблюдать переход тепла от холодного тела к горячему, вовсе не обязательно обладать острым зрением, разумом и проворством «демона» Максвелла - для этого достаточно иметь лишь немного терпения

... Проблема оказывается настолько сложной, что с ней невозможно иметь дело, соблюдая все требования строгости. Приходится выдвигать определенные упрощающие гипотезы; но являются ли они законными и согласующимися между собой? Я не уверен.»

Так Пуанкаре прошел мимо приоритета в правильном, уверенном и окончательном объяснении природы второго закона термодинамики в формулировке Клаузиуса. Позже это сделал Смолуховский. Пуанкаре всё рассказал, но потом всё смазал. Правильно рассказал о роли впечатления, а потом его выбросил. Рядом лежало, но не подобрал! У известного в прошлом писателя Честертона есть мудрая констатация: «Те, кто пользуется умом, не станут поклоняться ему - они слишком хорошо его знают. Те, кто поклоняется, - не пользуются, судя по тому, что они о нем говорят».

Козлов заключает: «Я прошу прощения у читателя за столь длинное цитирование: наверное, трудно сказать лучше и точнее».

Лучше и точнее изложить что? Необъяснимое и удивительное: несмотря на то, что крутятся около простого, естественного и очевидного решения, они всерьез совершенно точно принимают утверждение термодинамики о необратимости и пытаются все же разобраться в этом ужасно сложном вопросе и получить необратимость в замкнутой системе помимо кажимости. И Пуанкаре, и Кац, и Брикмон, и Козлов точно знают о повторяемости, но тем не менее ищут буквальное

объяснение термодинамического закона в самой системе с помощью математических манипуляций и какого-то побочного представления о необратимости.

#### **В п. 4 разговор идет о максвелловском распределении частиц.**

«Мы рассматриваем идеальный газ; так что взаимодействия между молекулами нет. Пусть  $E$  - полная энергия. Тогда  $v_1^2 + \dots + v_N^2 = 2E/m$ .»

Специальное указание на отсутствие взаимодействия между частицами газа при обсуждении установления максвелловского распределения звучит странно. Ведь без него оно не устанавливается, а в параллелепипеде энергии движения по перпендикулярным составляющим не выравниваются, так что единой температуры не получается.

Дальше, говоря об обоснованности предположения о равновероятности попадания в разные точки энергетической поверхности, отчего и происходит в пределе при многих частицах максвелловское распределение, Козлов замечает: «Во всяком случае ссылок на изотропность пространства  $\mathbb{R}^n$  и равноправие направлений скоростей частиц газа явно недостаточно: эти соображения никак не учитывают форму границы сосуда».

Во-первых, я думаю, что в более общем случае разных масс частиц основанием для расчетов должно быть равномерное распределение точек состояний на энергетической поверхности в импульсном пространстве, см. <sup>[26]</sup>. Сами по себе скорости не имеют определяющего значения, рассеяние частиц при столкновениях происходит еще в зависимости от масс. Ввиду канонической сопряженности координат и импульсов более естественно равномерному распределению частиц по координатам сопоставлять равномерное распределение импульсов ( $3N$ -мерного импульса) на энергетической поверхности. При отсутствии силового поля внутри объема распределение не должно зависеть от ориентации системы

координат, так как энергетическая поверхность - несколько не то, что координатное пространство. Единственно, от чего оно может и должно зависеть - это от масс частиц. При этом никакое пространственное направление не выделяется: распределения для разных компонент скорости или импульса каждой частицы одинаковы.

Во-вторых, в случае обычной термодинамики с длинами свободного пробега частиц, много меньшими характерных габаритов сосуда, частица, отразившись от стенки, практически тут же попадает под обстрел многих других частиц и быстро забывает об ударе о стенку. Не слишком близко к стенкам локальные распределения устанавливаются еще до перемешивания по объему, так что стенки в установлении равновесного распределения важны практически только для размешивания плотности, так что большинство частиц и не ощущают стенок непосредственно. Почти всё усреднение происходит только внутри сосуда. Именно факт малой важности формы сосуда для выравнивания распределений по координатам и импульсам обеспечивает появление в термодинамике скалярного объема. У сверхразреженных газов поведение другое.

В завершение темы максвелловского распределения замечу, что Козлов рассматривает изолированную систему, с фиксированной средней энергией на частицу. При конечном числе частиц он ищет и находит плотность вероятности одной частице иметь такую-то скорость. Это не экспонента. Надо сказать, в этом случае плотность вероятности обнаружить одновременно какие-то значения импульсов нескольких частиц не есть произведение одночастичных плотностей (параграф 2 второй главы в <sup>[22]</sup>). При неограниченном увеличении числа частиц одночастичная плотность приобретает вид экспоненты с показателем, пропорциональным энергии частицы. Однако в изолированной системе распределение для всех частиц и в этом случае также не мультипликативно. Оно может быть почти мультипликатив-

ным для большого числа частиц, но не для всех. Для всех не хватит большого количества энергии на хорошую имитацию экспоненты. Козлов же пишет: «Таким образом, каждая компонента скорости каждой частицы распределена по нормальному закону» (стр. 30).

Эта оговорка (?) у него не случайна. Он и в дальнейшем применяет каноническое распределение Гиббса к изолированным системам даже с конечными числами частиц. Физики же каноническим распределением называют распределение, возникающее в системе, помещенной в мощный термостат с заданной температурой. В такой системе у любого числа частиц по отдельности устанавливается максвелловское распределение, то есть даже одна частица в системе со временем будет иметь возможность пробежать очень многомерную энергетическую поверхность с соответствующей вероятностью. Это возможно только потому, что система выделена из общей системы с термостатом, и частицы термостата не учитываются в процессе перемножения распределений, но используются как неограниченный резервуар энергии. Изолированной же системе с конечным числом частиц приписывать каноническое распределение Гиббса нельзя.

### **В следующем пункте 5 рассматривается метод ансамблей Гиббса.**

Пусть имеется объем с  $N$  частицами. Значения трехмерных координат и импульсов частиц можно изобразить точкой в  $6N$ -мерном пространстве, которое называют фазовым. В этом пространстве при задании взаимодействий фазовая точка системы определяет свою траекторию. Утверждается, что с движением по траекториям во времени можно связать движение распределения вероятностей: «...фазовый поток динамической системы переносит вероятностную меру. Применительно к гамильтоновым

динамическим системам подход Гиббса позволяет ... обосновать равновесную термодинамику».

«Ансамбль Гиббса - это совокупность идентичных динамических систем, распределенных в одном и том же фазовом пространстве с некоторой плотностью».

Ну, идентичны они в отношении числа, свойств и полной энергии частиц, но различаются расположением частиц в своем трехмерном объеме и скоростями. Движение во времени частиц в сосуде отображается движением фазовой точки в фазовом пространстве. Все фазовые точки допустимого фазового объема представляют собой систему во всех возможных допустимых микросостояниях внутри сосуда (или наборе реальных сосудов, с которыми предполагаются какие-то действия). Когда-то предполагали, что одна фазовая траектория зачерчивает весь объем, который допускается объемом и энергией. Сплошной максимальный ансамбль Гиббса изображает все состояния системы, которые могли бы породить в среднем за бесконечно долгое измерение одно и то же среднее макросостояние (при большом числе частиц очень близкое к (максимально) равновесному).

Посмотрим обычную интерпретацию степени неравновесности и энтропии системы в связи с понятием фазового ансамбля. Приходится особо подчеркнуть, что степень неравновесности состояния реально мы оцениваем по картине расположения частиц (или еще и тепла) в одном объеме одной системы, а не в каких-то посторонних «идентичных» системах. Так и иллюстрируют картинкой в учебниках мгновенное состояние, соответствующее некоторому  $S_t$ . В фазовом пространстве это расположение отражается конкретным положением одной фазовой точки данной системы. Никаких других фазовых точек нет. Иные фазовые точки представляли бы в обычном интересующем нас трехмерном пространстве иную картину неоднородности расположения частиц. Они соответствовали бы нашей системе в другие моменты времени

с другими распределениями координат и импульсов и соответственно другим мгновенным «энтропиям». Их притягивать к делу при оценке неоднородности данного в анализируемый момент расположения точек было бы совершенно неуместно.

Следует, кроме того, различать по смыслу и процедуре формирования

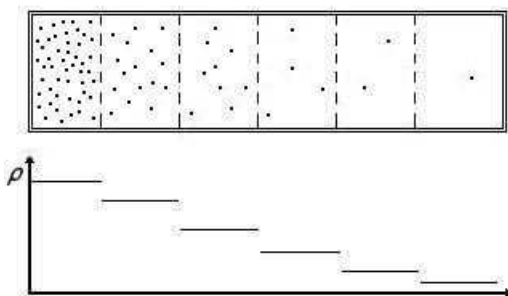
а) квазистатическое макросостояние и соответствующую ему энтропию и

б) мгновенные оценки распределений (которые могут быть неравновесными) координат и импульсов, каковым распределениям условно можно приписать энтропию, равную сумме энтропий ячеек, с помощью которых оценивается неравновесность, считая ячейки замкнутыми, а энтропии их как квазистатические. Условно - как если бы их действительно отгородили друг от друга и выдерживали квазистатически, чтобы в них нарабатывались обычные макросостояния с их традиционными энтропиями.

Всем обычным средним по времени состояниям соответствуют почти полные для своих объемов ансамбли Гиббса. Неравновесной же системе, оцениваемой по мгновенному распределению, соответствует суммарный фазовый объем ячеек и прямое произведение ансамблей. Точки распределены сплошь и равномерно. Вероятность состояния пропорциональна суммарному объему. При равновесии он максимален. Никакого потока вероятности нет. Во времени происходит изменение фазового объема, разумеется не по уравнению Лиувилля. Итак, равновесное состояние оценивается по доступному фазовому объему, неравновесное - по суммарному фазовому объему в ячейках внутри обычного объема, а движение - по механическому движению по одной фазовой траектории.

Почти очевидно, что определить неоднородность распределения частиц в объеме (ограничимся координатами) следует по картине типа гистограммы. Иного варианта нет.

Мысленно или реально разбиваем объем на ячейки и подсчитываем в них числа частиц. Обнаруженные данные сразу указывают неоднородности концентраций. Это как бы объективная картина неоднородностей. Вот пример картины распределения частиц и плотности по объему:



Напомню, что термодинамическая энтропия исходно определена только для полного отдельного объема, содержащего данное количество частиц, причем при длительном (квазистатика) измерении:  $S = Nk \ln(V/N)$ . То есть состояния в ячейках оцениваются как если бы они измерялись долго по сравнению со временем релаксации.

Для набора ячеек с частицами как отдельных систем имеем набор значений энтропии  $S_i$ . Энтропия набора систем определяется как их сумма. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \sum_i S_i = \sum_i N_i k \ln(V_i/N_i) = -k \sum_i N_i \ln(N_i/V_i) = -k \sum_i N_i \ln(\rho_i) = \\ &= -k \sum_i \rho_i \ln(\rho_i) V_i \end{aligned}$$

так что в идеальном случае в пределе получается известный «шенноновский» интеграл  $\int \rho_i \ln(\rho_i) dV$ . Так определяется энтропия неравновесного состояния.

Тут надо заметить, что на самом деле результат оценки по разбиениям формально не однозначен (почему и сказано выше о как бы объективной картине неоднородностей), что

будет прокомментировано позже. На самом деле ситуация еще сложнее, но для относительно короткого очерка полнота была бы слишком тяжелой, см. <sup>[22]</sup>.

Теперь посмотрим, как *термодинамическое* состояние отражается в фазовом пространстве. Механическое отражается одной фазовой точкой.

Опять повторяю, что термодинамическое квазистатическое состояние определяется за большое время. Обычное термодинамическое состояние может быть получено при (почти) всех начальных координатах и импульсах в разрешенном объеме и на энергетической поверхности. В этом плане ему соответствуют почти все точки допустимого фазового объема. Если же есть несколько объемов с частицами, то каждому из них будут соответствовать свои фазовые объемы. Общее описание их есть объединение их фазовых объемов и прямое произведение их «заполненных» фазовых пространств с суммарной размерностью. Эта оценка относится или к реально разделенным объемам, или к оценке «что получилось бы, если бы ввели перегородки на место мысленных разделений» для оценки неравновесного состояния. Неравновесное состояние как раз и может быть получено в первый момент после убиания реальных перегородок между реальными объемами.

Так вот термодинамическая вероятность состояния в объеме или системе объемов определяется величиной суммарного фазового объема или пропорционально числу точек суммарного фазового ансамбля. Так, если в одной половине сосуда собрались все частицы, а в другой их нет (как в учебниках картинками иллюстрируется термодинамическая вероятность состояния), то точки ансамбля будут сплошь занимать  $(1/2)^N$ -ю часть полного допустимого фазового объема. Повторю, что это условная термодинамическая оценка неравновесного состояния, существующего в некоторый момент. Если реально получить из него квазистатическое



макросостояние, то делать это придется долго, так что и следа не останется от начального микросостояния, все микросостояния дали бы такое макросостояние, поэтому в ансамбль для него надо будет включить все вообще допустимые ограничения фазовые точки, т.е. возможных микросостояний станет больше в  $2^N$  раз.

В статистической механике энтропией макросостояния с точностью до некоторых констант называется логарифм числа микросостояний, которые могли бы приводить к данному макросостоянию (и еще под логарифмом надо делить на число частиц в данном объеме, о чем сейчас не будем вспоминать). Таким образом, по состояниям ячеек, в статмеханике определяется вероятность разных распределений частиц по объему. (На основании аналогичной пропорциональности, но на энергетической поверхности находилось максвелловское распределение.)

Что будет в последующие моменты при такой оценке неравновесного состояния?

В общем получается, что фазовая точка движется по траектории, и точке в таком же фазовом пространстве по условно получающимся равновесным или неравновесным «макросостояниям» можно в каждый момент строить соответствующие области, заполненные потенциально возможными фазовыми точками, логарифм суммы этих областей давал бы поведение энтропии во времени. Существенно, что при этом фазовые объемы (ансамбли) последовательных состояний не получают как самостоятельные следствия одного из другого. Посему уравнение Лиувилля к ним не применимо, строящийся указанным образом фазовый объем не сохраняется, так называемая «тонкая» энтропия существует только для своего момента времени и в другой момент не переносится «фазовым потоком», как выражаются В.В.Козлов и его предшественники, а своеобразно преобразуется

соответственно новым положениям одной «реальной» точки в фазовом пространстве. Сопутствующий фазовый ансамбль (объем) не имеет самостоятельности ввиду отсутствия взаимно-однозначного соответствия - как и неопределима точно микросистема по макросостоянию (и даже макросостояние по микросистеме, если говорить чисто объективно уже ввиду отсутствия объективного разбиения на ячейки, см. [22]). Так что представление о переносе фазовым ансамблем вероятностной меры, излагаемое В.В.Козловым в 5-м разделе **Введения**, по меньшей мере не относится к нормальной термодинамике.

Можно, конечно, рассматривать аналогично движение всех точек ансамбля заполненной газом части сосуда после удаления перегородки и увеличения доступного объема (или выравнивания температур через теплопроводящую перегородку). Размер избранного первоначально фазового объема будет сохраняться, но сопутствующий вторичный фазовый объем (и вероятность состояния), как и сопутствующий частице на одной траектории, не будет сохраняться. В дальнейшем «первичный» фазовый объем только сохраняет источник расчета множества меняющихся макросостояний и соответствующих вторичных фазовых объемов в каждый будущий момент. То есть *по определению* движение фазовой точки по траектории дает основание для построения поведения фазового ансамбля распределения частиц в системе во времени, но не наоборот. О необоснованности здесь применять теорему Лиувилля написано и разъяснено два десятка лет назад в 1-й и 2-й главах книги [22]. Там же критически анализируется изложенная в 36-м параграфе книги Терлецкого попытка обойти противоречие возрастания энтропии сохранению фазового объема с помощью гипотезы Гиббса о перемешивании фазового ансамбля. Между прочим, одним из давших рекомендацию в печать книге [22] (я их благодарил во Введении) был Б.В.Гнеденко. Впрочем, это не

сделало ее известной в научных кругах. (См. также в <sup>[12]</sup>, п. 4 критику представлений Ж.Брикмона <sup>[20]</sup> о развитии ансамбля в его попытке опровергнуть возражение Лошмидта).

Итак, по теореме Лиувилля исходный фазовый объем будет сохраняться, как и одна точка на одной траектории в случае одной системы. Пресловутая «тонкая» энтропия сохраняется. Но это вообще не энтропия, она не имеет отношения к термодинамике. Приписываемая точкам вероятность остается при движении точек в прошлом: у новых положений исходной точки - новая вероятность. Вероятности состояний одной системы при определенных разбиениях на ячейки всегда привязаны к определенным точкам фазового пространства и остаются в них во все времена. При движении по механической траектории система переходит в состояния с другими вероятностями. Фазовые точки ансамбля Гиббса имеют фиксированную вероятность, которая определяется положением точек в нем, и при движении по траектории вероятность состояния меняется. Энтропия строится не по числу прибывших из прошлого фазовых точек, а в каждый момент для соответствующей точки на одной траектории по трехмерной ее реализации в реальном объеме.

При этом, так как при многих частицах фазовых точек с околоравновесным состоянием подавляющее большинство, то точка с таким состоянием обычно будет достигнута после нескольких пробегов от стенки к стенке, так что густо зачерчивать фазовый объем траекторией и, соответственно, стремиться к бесконечности время установления равновесия не потребуется. А в заметно равновесное состояние случайно попасть почти невозможно, его приходится приготавливать <sup>[22,27]</sup>.

Об этой непонятности с сохранением «тонкой» энтропии Козлов пишет в седьмом параграфе второй главы (стр. 95-96)

«Как известно, в статистической механике энтропия определяется как интеграл

$$S_t = - \int_{\Gamma} \rho_t \ln \rho_t d\mu, \quad d\mu = d^{2n}z.$$

Так как  $\rho_t(z) = \rho(g^{-t}(z))$  и поток  $g^t$  сохраняет меру  $\mu$ , то очевидно,  $S_t = \text{const}$ . Это замечание является частным случаем общего результата Пуанкаре о постоянстве *тонкой* энтропии динамических систем (**Введение**, п. 7).»

Подынтегральное-то выражение похоже, но не на том «многообразии».

Надо добавить, что объективного критерия разбиения на подсистемы нет. Все эти неоднородности выделяются субъективной практикой. В данной модели реально существуют лишь материальные частицы (или точки) и ограничивающие их движение границы, а также механические законы движения.

Пойдем далее. В.В.Козлов замечает:

«Подход Гиббса допускает еще одну интерпретацию. Предположим, что мы хотим найти движение  $x_t$  с начальным условием  $x_0$ . Однако, как правило, начальное условие  $x_0$  удастся реализовать с ошибкой, которая распределена по какому-либо закону ... . Если  $\rho$  - плотность начального распределения ошибок, то в момент времени  $t$  ошибки распределены с плотностью  $\rho_t$ , которая есть решение уравнения Лиувилля с данным Коши  $\rho$ .»

Это правильный метод для полезного дела. Который, конечно же, применяется без высоких слов в упрощенных вариантах в обычных делах. А на языке фазового объема он использовался Пуанкаре еще в 1890 году в теореме о квазипериодичности. Здесь  $\varepsilon$ -окрестность исходной точки при движении по траектории замечает фазовый объем до тех пор, пока не коснется исходной точки, что должно означать возвращение с указанной точностью к начальному состоянию.

Здесь  $\varepsilon$  просто указывает расстояние от некоторой идеальной траектории по перпендикулярам к ней.

А вот более тяжелый случай:

«*Статистической динамической системой* будем называть тройку  $(M, \{g^t\}, \{P\})$ , где  $M$  - гладкое многообразие,  $\{g^t\}$  - фазовый поток - группа ... преобразований  $M$ ,  $\{P\}$  - вероятностные меры на  $M$ , которые переносятся фазовым потоком. ... когда мера  $P$  имеет гладкую плотность, ... (её. - В.Г.) эволюция описывается уравнением Лиувилля. Состояние системы Гиббс назвал *статистическим равновесием*, если мера  $P$  инвариантна относительно потока  $\{g^t\}$ ; другими словами, решение уравнения Лиувилля не зависит от  $t$ . Статистическое равновесие гамильтоновой динамической системы можно назвать *тепловым равновесием*.»

Но возникает вопрос о связи поведения у такой многосистемной динамической системы с поведением интересующих нас отдельных систем, о поведении которых именно по отдельности говорит второй закон. Парой кратких предложений здесь не отделаться. Назвать тепловым равновесием можно, но какое отношение имеет бесконечный набор многочастичных невзаимодействующих и вообще не существующих систем к осмысленному показанию обычного градусника? Как раз это труднее представить и объяснить, чем обычное вполне понятное движение в период релаксации к равновесию в одной первоначально неравновесной системе, а также при контакте разных систем. Хорошо бы было явно показать, как именно температура (и вообще распределение частиц по координатам и импульсам) в конкретном элементе «многообразия» меняется со временем в соответствии с движением в нем частиц по механическому закону.

Здесь смешано выравнивание распределений гистограммного типа в одной системе (что имело бы смысл, потому что так и понимается выравнивание концентрации и температуры по объему и энергетической поверхности) с выравниванием распределения по бесконечному набору

систем, который мы никогда не наблюдаем, и которых попросту нет. В обычных термодинамических системах мы видим практически всегда быстрое установление равновесного распределения по энергиям в каждой из них по отдельности. К ним по отдельности и относится второй закон в формулировке Клаузиуса. По времени несколько задерживаются смеси частиц с сильно различающимися массами из-за относительно малой передачи энергии при отдельных столкновениях. Но в общем почти всё остальное время система практически находится в равновесии, и никакого очень большого континуума фазовых точек и даже траекторий проследить нет надобности и даже лишено смысла.

По поводу окончательности установления равновесия автор пишет: «Во-первых, заметим, что сходимости в обычном смысле здесь нет: решения уравнения Лиувилля как функции  $t$ , как правило, осциллируют и вообще не имеют никакого предела при  $t \rightarrow \infty$ ». Этот факт всем известен, и с ним надо согласовать интерпретацию второго закона. «Во-вторых, при переходе к *макроскопическому* описанию динамики сходимость вероятностной меры ... следует рассматривать в *слабом* смысле ... . Выяснение условий слабой сходимости решений уравнений Лиувилля - одна из ключевых задач, которые рассматриваются в этой книге».

А вот эта идея совершенно посторонняя, надуманная, не обоснованная, не соответствует действительному механизму появления второго закона в формулировке Клаузиуса и не нужна нигде в проблемах классической термодинамики. Там не нужна видимость получения чего-то, что можно было бы связать с просто математической тенденцией. Квазипериодичность бесспорна, и не следует стараться ее замазывать побочными уловками. Именно ее отвергает формулировка Клаузиуса, и не следует доказывать, например, что в среднем будущие состояния ближе к равновесию, чем начальное: это

будет не та задача. Искусственная техника с подменой задачи вполне может замазать даже явную периодичность систем с малым числом частиц, когда ни о какой необратимости не может быть и речи. Во всяком случае, такой прием никак не учитывает реальной конкретики, связанной с появлением временного предела возможного наблюдения над системой. Следовательно, он не соответствует задаче.

В разделе **6. Распределение Гиббса** остается неясной глубина и основательность вывода о статистической независимости динамически независимых подсистем.

Пусть в общей системе отдельные группы частиц движутся в соответствии со своими гамильтонианами, складывающимися в общий гамильтониан. Говорится, что они динамически независимы: «...изменение начальных условий для канонических переменных  $p^{(s)}, q^{(s)}$  ( $s \neq j$ ) никак не сказывается на зависимости  $p^{(j)}, q^{(j)}$  от времени  $t$ ».

Затем для полной системы берется экспоненциальное распределение Гиббса с полной энергией в показателе и ввиду аддитивности энергии представляется в виде произведения распределений для отдельных групп с их энергиями в показателях и с одной и той же общей температурой в знаменателях показателей.

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-\beta H}}{e^{-\beta H}} dpdq = \prod_{s=1}^k \int_{\Gamma_s} \frac{e^{-\beta H_s}}{e^{-\beta H_s}} dp^{(s)} dq^{(s)}. \quad (\dagger)$$

Во-первых, если, как обычно у Козлова, газ идеальный (в этом пункте об этом не говорится), то экспоненциальное распределение не будет устанавливаться. К тому же здесь при разбиении гамильтониана на части как-то упущена возможность столкновений частиц разных групп (впрочем, как и внутри групп). Тем более у разных групп средние энергии, то есть и температуры, без взаимодействий

с другими не обязаны становиться одинаковыми. Кроме того, отдельные группы могут состоять из небольшого числа частиц, у которых распределение без внешних воздействий не может быть экспоненциальным. Следовательно, возможность представить общее распределение в виде произведения независимых распределений одинаковой формы и специфичных лишь массами своих частиц, в действительности весьма проблематична. Ну надо же как-то серьезно, полно и внятно описывать условия и обосновывать доказываемое!

Вообще экспоненциальное распределение с аддитивным показателем весьма удобно для демонстрации мультипликативности и, следовательно, вроде бы независимости подсистем. На самом деле оно получается только после того, как частицы достаточно провзаимодействуют друг с другом и, так сказать, выработают «общую позицию». До того они, можно сказать, еще сохраняют свою исходную механическую индивидуальность и действительно независимы.

Если применить этот подход с разбиением гамильтониана на части к системе с конечным числом частиц, где экспонента в распределении не появляется, то уже из-за конечности общей энергии мультипликативности распределения и статистической независимости групп не возникнет.

Другое дело, когда система помещена в мощный термостат. Все гораздо менее мощные системы получают экспоненциальные распределения с той же температурой, даже если в системе немного частиц. Если же в системе без термостата большое, но не безграничное число частиц, то равновесное распределение близко к экспоненциальному, но только при вытаскивании относительно небольшого числа частиц, так как суммарная энергия у остающихся становится меньше, тогда как экспонента предполагает наличие неограниченного источника энергии.

Автор пишет: «... главным аргументом в пользу выбора распределения вероятностей (6.3) (это левая часть приведенного выше равенства (†). - В.Г.) является следующий



ключевой результат Гиббса: усредняя динамические характеристики гамильтоновой системы, зависящей от параметров, по плотности (6.3), мы получим некоторую термодинамическую систему, которая удовлетворяет всем аксиомам термодинамики».

Может быть, этого и достаточно, но не необходимо (к тому же аддитивность систем так просто не получается). Чтобы получалась термодинамика, достаточно конечного числа частиц, наличия их столкновений (для выравнивания энергий по направлениям в более чем одномерном случае), адиабатически медленных изменений объема для появления адиабатических инвариантов, а также однородной зависимости энергий частиц от импульсов, когда давление зависит только от полной кинетической энергии. Простейший модельный аналог классической термодинамики появляется уже в одномерном случае без установления максвелловского распределения <sup>[22,24]</sup>. При этом причины возникновения макросостояния и их поведения и, следовательно, термодинамики становятся вполне ясными в общем случае без всякой мистики. Подход с применением распределения Гиббса не объясняет природы термодинамики и вообще относится к частному ее варианту.

На этом закончим разбор весьма содержательного, почти сорокастраничного **Введения**. Добавлю о действительном понимании энтропии.

Первично энтропия определяется не в статистической механике, а в термодинамике как комбинация макропараметров. Связь ее с микроскопикой встречала принципиальные трудности. Собственные попытки написать выражение для энтропии через микропеременные не имели успеха. Особенно существенной была трудность происхождения фазового объема при первичной механике с нулевой неопределенностью в действии. Однако анализ неточности практического измерения макропараметров в классической модели при

отсутствии точного временного слежения за микросистемой выявил закономерность: произведение характерной ошибки определения энергии частиц на время измерения давления, необходимого для вычисления энергии, отлично от нуля и является адиабатическим инвариантом, как и энтропия. Эта неточность в действии характеризует контроль над микросистемой со стороны макропараметров. Такой контроль не позволяет получать КПД, характерный для механики. Эта неточность в действии и есть искомый фазовый объем. В связи с этими совпадениями логично связать энтропию с этой неточностью, см. <sup>[22,24]</sup>.

Тут уместно вспомнить другое высказывание Пуанкаре. В 1904 г. он говорил: «...принцип Карно (2-й закон в основном в формулировке Томсона. - В.Г.) есть принцип несовершенный - нечто вроде уступки слабости наших чувств: только потому, что глаза наши недостаточно остры, мы не различаем элементов в смесях; лишь оттого, что *наши руки слишком грубы* (курсив мой. - В.Г.), мы не можем эти элементы разделить; демон, придуманный Максвеллом, который мог бы сортировать отдельные молекулы, сумел бы дать Вселенной обратный ход»<sup>[28]</sup>. Это же есть указание на важность управления, а не только на саму систему. И тут следовало бы доработать до законченного представления. Однако традиционный объективизм мешал взглянуть более серьезно и пристально на управление, которое существует, конечно, только в сфере субъективного. 30 лет назад один известный математик сказал по поводу статьи <sup>[24]</sup> об энтропии как характеристике управляющих действий, что идея верная, и она ему в свое время в голову не пришла, но он бы написал это на одной страничке. Ну вот потому она ему в голову и не пришла.

Следует обратить внимание еще на то, что В.В.Козлов не затронул вопроса о том, почему при безразличии механики к выбору направления времени, при квазипериодичности и

при априорной равновероятности направлений скоростей частиц в начале неравновесного процесса движение почти никогда не идет сначала еще дальше от равновесия, например, горячий чай, оказавшийся в более холодном воздухе, еще хотя бы на некоторое время еще больше не нагревается. Пригожин решил этот вопрос введением надуманного «принципа отбора», запрещающего реализоваться в природе скоростям противоположных знаков <sup>[15]</sup>, критику см. в <sup>[29]</sup>. Рассмотрение в подходе Смолуховского позволяет легко получить естественное объяснение <sup>[22,27,30]</sup>.

В дальнейшем В.В.Козлов более подробно излагает реализации уже высказанных им идей, так что остановимся только на некоторых принципиальных моментах.

В первой главе «Кинетика бесстолкновительной сплошной среды» он в начале отдает должное модели М.Каца: «Логическая возможность согласования необратимого поведения системы со свойствами обратимости и возвращаемости была продемонстрирована М.Кацем (ссылается в частности на <sup>[15]</sup>. - В.Г.) на так называемой *круговой модели*.» Однако Кац в одном варианте получил переход к равновесию в обратимой по определению системе в явно искусственной нереалистической процедуре с якобы естественным принудительным выравниванием имеющегося содержимого. Другой вариант его демонстрации необратимости в ней же - устремление числа частиц к бесконечности и ограничение наблюдения относительно небольшим временем. Но это же столетний вариант интерпретации Смолуховским появления впечатления необратимости. Никакой необратимости в самой системе Кац без двойных стандартов, само собой, не доказал. Более подробно его модель анализируется в <sup>[12]</sup>, там же указаны некоторые ошибки в применении движения фазового ансамбля к объяснению временной эволюции системы.

В Приложении I в книге Каца <sup>[16]</sup> (стр. 228) Г.Е.Уленбек так разрешает противоречие необратимости с теоремой Пуанкаре (Уленбек Г.Е. Уравнение Больцмана.):

«Причина, по которой теорема Пуанкаре не имеет отношения к теории необратимых процессов, двойкого рода:

(а) Поскольку  $N$  очень велико, время возвращения для некоторой фиксированной «малой» начальной области становится огромным, гораздо больше, чем наблюдаемое время выравнивания или релаксации. Тот факт, что для конечной механической модели существует время возвращения  $T_0$ , лишен, таким образом, интереса, так как мы хотим следить за системой только в продолжении времени  $t \ll T_0$ .»

Уленбек неточен. Если бы принципиальная квазипериодичность не имела бы отношения, то не приходилось бы разъяснять противоречие. Просто указываемый ею эффект не важен на практике общения с большими системами, но не в объективной математике (кроме того, бывают и не очень большие системы, где обратимость явно видна). Но практика (и приближенность) связана с субъектом, так что вне сферы субъективного нет второго закона термодинамики (в том числе и в формулировке Томсона как необходимость холодильника для циклической тепловой машины и принципиальная нестоцентность КПД уже потому, что без субъекта нет полезности). Смолуховский разъяснил четче все условия возникновения впечатления необратимости у наблюдателя. О второй причине Уленбек начинает так:

«(б) Начальное состояние никогда не бывает полностью определено, так как любое макроскопическое измерение дает информацию лишь о средних величинах по большой совокупности молекул. Поэтому мы должны рассматривать не одну механическую систему, а, по терминологии Гиббса, ансамбль идентичных систем, отличающихся только начальной фазой, и следить за течением всего этого ансамбля во времени. Иными словами, следует ввести а  $\Gamma$ -пространстве распределение вероятностей  $D_N(x_1, \dots, x_N, t)$

и следить за его изменением во времени. Известно, что изменение  $D_N(x_1, \dots, x_N)$  во времени определяется теоремой Лиувилля ...»

$$\partial D_N / \partial t = \{H, D_N\},$$

где  $H$  – функция Гамильтона...»

Основание для рассмотрения ансамбля явно надуманное. Разве что для определения ошибки результата, как указал выше Козлов, но мы здесь не занимаемся составлением артиллерийских таблиц. А «известно» свидетельствует о том, что вопрос не анализировался критически с самого появления идеи о «переносе вероятностной меры фазовым потоком».

Затем Козлов переходит к идеальному газу. Снова отмечается: «...в обосновании термодинамики имеются дополнительные затруднения несколько иного сорта. Дело в том, что *идеальный газ* рассматривается как система невзаимодействующих частиц. В частности, они не могут сталкиваться друг с другом. Именно при этом предположении в статистической механике выводится уравнение состояния идеального газа. Если же учесть взаимодействие (в частности, если допустить возможность столкновений), то каноническое распределение Гиббса даст нам уравнение состояния, которое будет отличаться от классического уравнения Клапейрона...» («несомненно, и так далее». - В.Г.) У него неясно, именно из-за столкновений частиц или из-за уменьшения эффективного объема и нарушения аддитивности.

Вот дилемма! Как же оказывается в какой-то мере работоспособной идеальное классическое уравнение при реальных газах с неточечными молекулами? Или как из неидеального уравнения сделать идеальное? Да отбросить все приближения кроме нулевого! После перехода к пределам в нужном порядке - соответственно реальности. Или удовлетвориться несколько неточным описанием реальности. Возможно, что эта неточность вообще практически не наблюдаема. У студентов физфака второго семестра тут нет

проблем. Надо сказать, львиная доля «непостижимой эффективности математики в естественных науках» (Е.Вигнер<sup>[31]</sup>) имеет происхождением весьма обычную практическую достаточность уже нулевого и первого приближений.

Итак: «Указанные выше трудности можно преодолеть, если рассматривать идеальный газ как *бесстолкновительную сплошную среду*. Сразу следует отменить, что гипотеза о сплошности газа хорошо согласуется с непрерывностью распределения частиц газа по скоростям».

Сразу же отмечу, что не понял, почему В.В.Козлов не упомянул также о непрерывности распределения по координатам. Или нет проблем с построением непрерывного распределения по дискретным точкам - положениям частиц не сплошного газа? Но как же получается термодинамика и статмеханика не при сплошном заполнении пространства частицами и тем более неидеальными?

Помимо того, также сразу надо отметить, что исчезновение квазиобратимости при сплошной среде из частиц сильно облегчается, как о том говорит теорема Пуанкаре о возвращениях в случае невыразимо большого числа частиц. С этим никто спорить не будет, правда, это не помогает разрешить реальный парадокс необратимости. Но наверно найдутся и недовольные тем, что реально максвелловское распределению без столкновений частиц возникать будет по меньшей мере с большим трудом.

Еще Пуанкаре рассмотрел движение сплошного бесстолкновительного газа в параллелепипеде  $\Pi$ . «Основное его наблюдение состоит в том, что независимо от начального распределения с течением времени газ стремится к равномерному заполнению  $\Pi$ . Тем самым идеальный газ демонстрирует необратимое поведение».

Очевидно, В.В.Козлов неполно описал условия приведенного результата Пуанкаре. Если взять сгусток газа с

одинаковыми скоростями частиц, то в параллелепипеде он так и будет двигаться сгустком. По-видимому, Козлов почему-то представляет, что идеальному газу с самого начала присуще максвелловское распределение. Затем он доступно рассказывает, почему не получаются возвращения. «Каждая частица газа бесконечное число раз подходит сколь угодно к своему начальному положению. Однако, ввиду неравномерности свойства возвращаемости, имеет место необратимая *диффузия* газа. ... Таким образом, еще в 1906 году на упрощенной модели (имеющей самое прямое отношение к кинетической теории) Пуанкаре продемонстрировал совместимость свойств обратимости и возвращаемости с необратимым поведением динамической системы».

В общем, ничего нового в понимании процесса порождения необратимости Козлов тут не предъявил. При бесконечном числе частиц и непрерывно-разных у них скоростях теорема Пуанкаре укажет бесконечно долгое время возвращения. Несоизмеримость скоростей и случайность (несоизмеримость) выбора моментов наблюдения даже при конечных числах частиц создаст впечатление случайности их движения. Если взять набор точек на отрезке, придать им разные скорости одного порядка, но не слишком соизмеримые, запустить из любого места и, начиная через несколько пробегов, замерять в не слишком близкие между собой моменты времени, то числа частиц в левой и правой половинах отрезка будут оказываться в среднем одинаковы. Дисперсии также будут соответствовать случайному равномерному распределению. Такое естественное и заранее очевидное появление впечатления случайного поведения строго детерминированной системы я сам наблюдал в расчетах еще на ламповой ЭВМ в так называемых кодах в середине 60-х.

В дальнейшем в этой части есть только одно интересное место - вопрос об определении плотности распределения частиц. «Для газа Больцмана-Гиббса, состоящего из *конечного* числа частиц, прежде всего надо дать строгое определение

выравнивания плотности. К сожалению, до настоящего времени в этом направлении нет точных теоретических результатов». О каких же тогда вероятностных мерах  $\{P\}$  на  $M$ , которые переносятся фазовым потоком, писалось во **Введении** при определении *статистической динамической системы*? Вопрос действительно важный. В восьмом издании «Элементарного введения в теорию вероятностей»<sup>[32]</sup> Гнеденко и Хинчина написано об этой проблеме с некоторым оптимизмом, впрочем - не оправдавшимся.

У физиков здесь вроде бы особых проблем нет. Так, повсеместно плотность в точке определяется как усредненное по «физически бесконечно малому объему» вокруг этой точки - малому по сравнению с целым объемом, но содержащим много молекул. Однако, конечно, это не однозначное определение. При малом общем числе частиц приближение грубое, а кроме того - ответ всегда будет зависеть от формы границ объемчиков. Самый яркий пример незамечания неоднозначности - типичная картинка в учебниках молекулярной физики, демонстрирующая термодинамическую вероятность состояния, когда прямоугольник с точками-частицами делится (обычно вертикальной!) линией на две части с разными количествами попавших частиц, и вычисляется соответствующая вероятность состояния. Не замечается, что разбиение, которого в действительности нет, можно провести и перпендикулярно первому, и не обязательно прямой линией. В действительности не существует объективного предпочтения для какого-то выбора разбиения, соответственно и объективной оценки вероятности состояния не существует. А вероятность любого расположения точек на плоскости или в объеме равна нулю. Положение - т.е. некоторое взаимопонимание - отчасти спасает схожесть на практике способов разбиения у разных людей. И тут, как и в интерпретации Смолуховским необратимости и как в задаче управления передачей энергии частиц газа во внешнюю



работу, включается субъективный фактор (см. первый параграф первой главы книги [22]).

Оригинально, что о проблеме размазывания на сплошную область данных в точках писала Блаватская, что я с удивлением обнаружил однажды, перелистывая на уличном лотке ее толстую «Тайную доктрину». Как говорится, проезжая мимо станции и обозревая окрестности, у меня слетела шляпа.

Выборочный обзор идей книги [6] на этом закончу. Более поздняя книга В.В.Козлова [8] рассматривает обосновательские вопросы в прежнем духе. Приведу представление о задаче (стр. 15).

«3. Что такое *тепловое (статистическое) равновесие* в теории ансамблей Гиббса и всегда ли система стремится к равновесному состоянию? ...

Было бы естественным считать, что предельное состояние теплового равновесия описывается стационарной плотностью распределения вероятностей

$$\bar{\rho}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_t(x). \quad (1.7)$$

Однако, как заметил сам Гиббс ..., этот предел в обычном смысле почти никогда не существует: плотность  $\rho_t(x)$  как функция  $t$  осциллирует по теореме Пуанкаре о возвращении. Гиббс так и не сумел обойти это затруднение.

Между тем имеется естественный и простой выход. Можно заменить обычную сходимост в (1.7) сходимостью в некотором более сильном смысле, например, *сходимостью по Чезаро*:

$$\bar{\rho}(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \rho_t(x) dt. \quad (1.8)»$$

Тепловым равновесием называется равномерное распределение энергии по объему. Для многочастичных систем оно действительно практически существует почти всё

время. И задачей может быть получение вывода, что система преимущественно находится близко к равновесию, следовательно из неравновесного состояния она относительно быстро перейдет в практически равновесное. Но в рассматриваемой проблеме согласования статмеханики со вторым законом термодинамики (конкретно - в формулировке Клаузиуса) нам ни в какой степени и ни в каком смысле не нужна сходимость к среднему по времени от чего бы то ни было. Ведь сам автор указывает проблему: противоречие необратимой формулировки закона и наличие обратимости, периодические осцилляции. Какое-либо новое неравновесное состояние, как и начальное неравновесное, не держится бесконечно долго. Опровержение строгой формулировки Клаузиуса наступает уже при отдельном кратковременном возвращении неравновесного состояния. А среднее значение практически подавляет, скрывает кратковременные отклонения от почти постоянного равновесия. Очень удобное средство для псевдорешения проблемы. Которую решил Смолуховский.

### Литература

1. Губин В.Б. О связи стилей математического и физического мышления с природой задач математики и физики / Вопросы философии, 1998, вып. 11, с. 142-148. (См. также в сб.: Губин В.Б. О физике, математике и методологии. - М.: ПАИМС. 2003. С. 210-226. <http://entropy.narod.ru/FMM-11.HTM>.)
2. Губин В.Б. О приведении к очевидности как доказательстве в реальности / Философские науки, 2002, № 3, стр. 144-157; № 4, стр. 141-148; № 5, стр. 151-157. (См. также в сб. : Губин В.Б. О физике, математике и методологии. - М.: ПАИМС. 2003. С. 264-312. <http://entropy.narod.ru/FMM-14-1.HTM> и <http://entropy.narod.ru/FMM-14-2.HTM>.)

3. Фейнман Р. Характер физических законов. - М.: 1968. С. 55.
4. Кезин А.В. Научность: эталоны, идеалы, критерии. - М. 1985.
5. Суханов А.Д. Роль вероятностных представлений в современной физике / В сб. "Математика и опыт". - М.: Изд. МГУ, 2003. С. 259-271.
6. В.В.Козлов. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002.
7. В.В.Козлов. Кинетика бесстолкновительной сплошной среды //Труды семинара «Время, хаос и математические проблемы». Вып. III. - М.: Книжный дом «Университет». 2004. С. 15-36.
8. Козлов В.В. Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2008.
9. Смолуховский М. Молекулярно-кинетические исследования по вопросу об обращении термодинамически необратимых процессов и о возврате аномальных состояний // Эйнштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение. - Л.: ОНТИ, 1936. С. 303.
10. Смолуховский М. Доступные наблюдению молекулярные явления, противоречащие обычной термодинамике // Там же. С. 197.
11. Анри В. М. ф. Смолуховский. (Некролог) 1, 67 (1918).
12. Губина Н.В. Продолжение о хаосе. - М.: Изд. РУДН. 2010.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. - М.: Наука, 1976. С. 47-48.

- 14 Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. - М.: Наука, 1975 (§80, пп. 1 и 6).
15. Пригожин И. Р. От существующего к возникающему. - М.: Наука, 1985.
16. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. - М.: Изд. Мир. 1965.
17. Bricmont J. Science of Chaos or Chaos in Science? // *Physicalia Magazine*, 17, 159-208 (1995).
18. Шредингер Э. Статистическая термодинамика. - Ижевск: Изд. «Удмуртский университет». 1999.
19. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. - М.: Высшая школа. 1966, 1973
20. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. - М.: Изд. иностранной литературы. 1955.
21. Кубо Р. Статистическая механика. - М.: Мир, 1967.
22. Губин В.Б. Физические модели и реальность. Проблема согласования термодинамики и механики. - Алматы: МГП “Демеу” при изд-ве “Рауан” Министерства печати и массовой информации Республики Казахстан, 1993. 231 с.
23. Губин В.Б. Некоторые требования к правильному разрешению парадоксов Гиббса // *Журнал физической химии*, 1985. Т. 59. № 2. С. 517-520.
24. Губин В.Б. Энтропия как характеристика управляющих действий // *Журнал физической химии*. 1980. Т. 54. Вып. 6. С. 1529-1536.
25. Честертон Г.К. Упорствующий в правоверии / Сб. «Писатель в газете». - М.: Прогресс. 1984. С. 323-328.
26. Губин В.Б. О природе максвелловского распределения / О науке и о лженауке. - М.: Изд. РУДН. 2005. С. 28-30.

27. Губин В.Б. О приготовлении неравновесных состояний / О науке и о лженауке. - М.: Изд. РУДН. 2005. С. 17-27.
28. А.Пуанкаре. Ценность науки // О науке. - М.: Наука, 1983. С. 238-239.
29. Губин В.Б. История с энтропией / Философские науки, 1997, № 3-4, стр. 98-120. (См. также в сб.: Губин В.Б. О физике, математике и методологии. - М.: ПАИМС. 2003. С. 76-113. <http://entropy.narod.ru/FMM-05.HTM>.)
30. Губин В.Б. О проблеме согласования термодинамики и механики / Труды семинара “Время, хаос и математические проблемы”. Вып. II. - М.: Книжный дом “Университет”. 2001 г. С. 177-192. (См. также в сб.: Губин В.Б. О физике, математике и методологии. - М.: ПАИМС. 2003. С. 76-113. <http://entropy.narod.ru/FMM-01.HTM>.)
31. Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // В сб.: Вигнер Е. Этюды о симметрии. - М.: Мир, 1971. С. 182-198.
32. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. - М.: Наука. 1976. С. 164-165.

**Валерий Борисович Губин**

**МАТЕМАТИКИ, БОЙТЕСЬ ФИЗИКИ!  
ФИЗИКИ, ОПАСАЙТЕСЬ МАТЕМАТИКОВ!**

Издание подготовлено в авторской редакции

Подписано в печать 01.04.2010 г. Формат 60x84/16.  
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 3,3. Тираж 200 экз. Заказ .

---

Российский университет дружбы народов  
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

---

Типография ИПК РУДН  
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, тел. 952-04-41